

Logique

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter par le connecteur logique qui s'impose ; \Leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow .

1. $x^2 = 4 \dots\dots\dots x = -2$.
2. $|x| = -x \dots\dots\dots x \in]-\infty; 0]$.
3. $x = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots \sin(2x) = 0$.
4. $x \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots |\cos(\pi x)| = 0$.

Exercice 2. Soient P et Q deux assertions.

1. Dresser la table de vérité de $(P \text{ et } P \Rightarrow Q)$.
2. Servez-vous de 1. pour dresser la table de vérité de $(P \text{ et } P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 3. 1. Rappeler la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.

2. Dresser la table de vérité de $(P \Rightarrow Q \text{ et non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$.

Exercice 4. L'assertion $(2 = 3) \Rightarrow (1 = 4)$ est-elle vraie ?

Exercice 5. Exprimer, en utilisant un langage formalisé les assertions suivantes :

1. L'entier m est impair.
2. 6 est pair.
3. Tout entier relatif est impair.
4. Le réel r est rationnel.
5. Tout entier naturel est rationnel.
6. Quels que soient deux réels non nuls, leur produit est non nul.
7. Le sinus de n'importe quel réel est compris entre -1 et 1.

Exercice 6. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Nier les assertions suivantes.

1. $x \in]0; 1]$.
2. $x = 0$ ou $x < -3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 10$.
4. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.
6. $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
8. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$.

Exercice 7. Comment quantifier l'expression $x + y^2 = 0$ pour obtenir une assertion vraie ?

Exercice 8. On considère l'assertion : "Si j'habite à Paris, alors j'habite en France."

1. Donner la contraposée de cette assertion.
2. Donner la réciproque de cette assertion.